

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
"ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ"

А.А. Петков

**ОРТОГОНАЛЬНОЕ ЦЕНТРАЛЬНОЕ КОМПОЗИЦИОННОЕ
ПЛАНИРОВАНИЕ В ТЕХНИКЕ И ЭЛЕКТРОФИЗИКЕ
ВЫСОКИХ НАПРЯЖЕНИЙ**

Учебно-методическое пособие по курсу
"Специальные разделы математики"
для студентов электротехнических и электроэнергетических
специальностей

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета,
протокол № 2 от 21.06.07

Харьков НТУ "ХПИ" 2007

ББК 22.172

П 23

УДК 519.242:621.31

Рецензенти:

А.В. Исакова, к-т техн. наук, доцент НТУ "ХПИ";

Ю.М. Полужков, д-р техн. наук, вед.науч.сотр. ИТФ ХФТИ

Викладено теоретичні основи й надані практичні рекомендації із проведення ортогонального центрального композиційного планування в галузі техніки й електрофізики високих напруг. Наведено приклади розв'язання завдань в галузі оптимізації блискавкозахисту та аналізу працездатності високовольтних імпульсних пристроїв.

Призначено для студентів електротехнічних і електроенергетичних спеціальностей

П 23 Петков А.А. Ортогональное центральное композиционное планирование в технике и электрофизике высоких напряжений: Учеб.-метод. пособие. – Харьков: НТУ “ХПИ”, 2007. – 61 с.

ISBN

Изложены теоретические основы и даны практические рекомендации по проведению ортогонального центрального композиционного планирования в области техники и электрофизики высоких напряжений. Приведены примеры решения задач в области оптимизации молниезащиты и анализа работоспособности высоковольтных импульсных устройств.

Предназначено для студентов электротехнических и электроэнергетических специальностей.

Ил. 8. Табл. 23. Библиогр. 12 назв.

ISBN

© А.А. Петков, 2007 г.

© НТУ "ХПИ", 2007 г.

Вступление

Физические процессы, протекающие в высоковольтных установках, характеризуются в общем случае нелинейными зависимостями от влияющих факторов, при их изучении линейная модель отклика часто не является адекватной, что вызывает необходимость построения математических моделей более высокого порядка и, в частности, квадратичной модели.

Настоящая методическая разработка содержит основные элементы теории ортогонального композиционного планирования, обеспечивающего построение квадратичных моделей электротехнических систем и их оптимизацию.

Предполагается, что пользователи учебно-методического пособия уже изучили планирование полных факторных экспериментов вида 2^k и дробных факторных экспериментов вида 2^{k-p} , а также статистический анализ уравнения регрессии первого порядка [1].

Для удобства пользователей пособие снабжено кратким терминологическим словарем, приведенным в приложении 1. Словарь содержит основные термины по курсу планирования эксперимента, математической статистике и математике, используемые в настоящем пособии.

Практическое применение планирования экспериментов связано с различного рода вычислениями, которые удобнее производить с использованием программного продукта Excel. В приложении 2 рассмотрены основные приемы вычисления выражений, используемых в планировании экспериментов.

1. Ортогональное планирование второго порядка

Как известно из курса высшей математики [2], действительная функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, имеющая все производные включительно до m в некоторой области точки с нулевыми координатами, может быть представлена по формуле Тейлора в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & f(0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{(0)} \cdot x_i + \\ & + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{(0)} \cdot x_i \cdot x_j + R_m(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $R_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – остаточный член, который включает слагаемые, содержащие производные более высоких порядков.

Обратим также внимание, что в правой части (1.1) функция и ее производные вычисляются в точке нуль.

Выражение (1.1) дает нам основание для представления отклика полиномом второго порядка для k кодированных переменных x_i , $i=1..k$ в виде

$$y = \sum_{i=0}^k b_i x_i + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2, \quad (1.2)$$

где $x_0 = 1$ – фиктивная переменная, которая вводится для общности рассуждений; b_0 является оценкой теоретического коэффициента

$\beta_0 = f(0)$; b_i при $i > 0$ – оценкой $\beta_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{(0)}$; b_{ij} при $i \neq j$ – оцен-

кой $\beta_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{(0)}$; b_{ii} – оценкой $\beta_{ii} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \Big|_{(0)}$.

Например, для $k = 2$ полином (1.1) имеет вид

$$y=b_0x_0+b_1x_1+b_2x_2+b_{12}x_1x_2+b_{11}x_1^2+b_{22}x_2^2; \quad (1.3)$$

для $k = 3$

$$y=b_0x_0+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_{12}x_1x_2+b_{13}x_1x_3+ \\ +b_{23}x_2x_3+b_{11}x_1^2+b_{22}x_2^2+b_{33}x_3^2; \quad (1.4)$$

для $k = 4$

$$y=b_0x_0+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4+b_{12}x_1x_2+b_{13}x_1x_3+b_{14}x_1x_4+ \\ +b_{23}x_2x_3+b_{24}x_2x_4+b_{34}x_3x_4+b_{11}x_1^2+b_{22}x_2^2+b_{33}x_3^2+b_{44}x_4^2. \quad (1.5)$$

Количество коэффициентов полинома (1.2) определяется по формуле

$$N_2=C_k^2+2k+1, \quad (1.6)$$

где слагаемое C_k^2 (число сочетаний из k по 2) определяет количество членов полинома, содержащих произведение двух факторов; слагаемое $2k$ определяет количество членов полинома, содержащих переменные в первой (k членов) и второй степени (k членов); слагаемое 1 определяет количество свободных членов полинома (содержащих переменную x_0).

Для построения полиномов второго порядка вида (1.2) можно использовать трехуровневые полные факторные эксперименты ПФЭ 3^k , для которых количество наборов изменения факторов (количество точек исследуемого факторного пространства)

$$N_3=3^k. \quad (1.7)$$

Используя данные табл. 1.1, проведем сравнение величин N_2 и N_3 .

Таблица 1.1 – Количество точек факторного пространства

Расчетные соотношения	Число факторов – k				
	2	3	4	5	6
$N_2 = C_k^2 + 2k + 1$	6	10	15	21	28
$N_3 = 3^k$	9	27	81	247	729
$N_{\theta} = 2^k + 2k + 1$	9	15	25	43	77

Как видно из таблицы, N_2 всегда меньше N_3 . То есть, применяя план ПФЭ 3^k , мы вынуждены проводить лишние опыты, а значит, затрачивать больше времени и средств, так как необходимое количество наборов изменения факторов для определения всех коэффициентов полинома (1.2) равно N_2 .

С целью уменьшения числа избыточных опытов Г.Е.П. Бокс и К.Б. Вилсон предложили композиционные планы второго порядка, при построении которых используются ортогональные планы первого порядка ПФЭ 2^k или ДФЭ 2^{k-p} (в этом случае последние принято называть основой или ядром композиционного плана). Принцип построения композиционного плана заключается в том, что к ядру плана добавляются дополнительные точки факторного пространства: в центре плана и на некотором расстоянии d от него, последние получили название звездных точек, а величина d – звездного плеча. Если эти точки расположены симметрично относительно центра плана на окружности или сфере, то план называется центральным. Рассмотрим построение ортогональных центрально-композиционных планов (ОЦКП) двух и трех-факторных экспериментов.

Геометрическая интерпретация этих планов в факторном пространстве показано на рис. 1.1. На рис. 1.1а точки 1 – 4 являются ядром ОЦКП (план ПФЭ 2^2), точки 5 – 8 – звездные точки, точка θ – центральная точка ОЦКП. Соответственно на рис. 1.1б ядром являются точки 1 – 8 (план ПФЭ 2^3), точки 9 – 14 – звездные точки, точка θ – центральная точка ОЦКП.

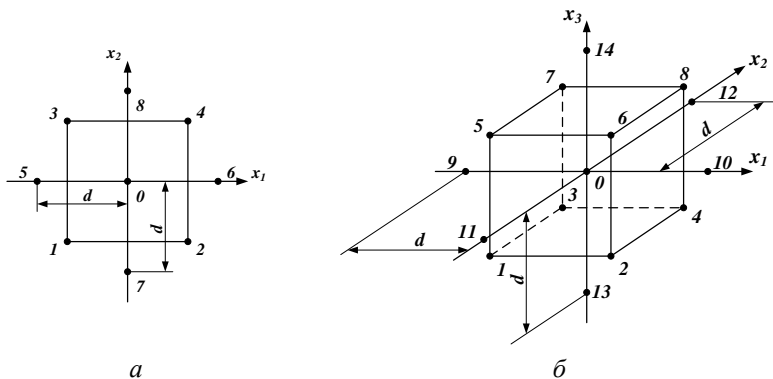


Рисунок 1.1 – Геометрическая интерпретация ОЦКП для двух (а) и трех (б) факторов.

Для ОЦКП количество точек в факторном пространстве определяется по формуле

$$N_{\text{ог}} = 2^k + 2k + 1, \quad (1.8)$$

где слагаемое 2^k соответствует числу точек ПФЭ 2^k ; слагаемое $2k$ соответствует числу звездных точек; слагаемое 1 соответствует точке в центре плана.

Значение величины $N_{\text{ог}}$ в зависимости от количества факторов, приведено в табл. 1.1, из которой видно, что, начиная с трех факторов, ОЦКП имеют существенно меньшую избыточность опытов по сравнению с планами ПФЭ 3^k . Так с увеличением числа факторов k неравенство $N_3 - N_2 > N_{\text{ог}} - N_2$ усиливается, а разность $N_3 - N_{\text{ог}}$, увеличение которой отражает уменьшение избыточности опытов, непрерывно возрастает.

Для того, чтобы сохранить ортогональность плана, необходимо при построении матрицы планирования второго порядка обеспечить выполнение двух условий:

условия симметрии – сумма элементов любого столбца матрицы планирования размером $N_{\text{ц}} \times (N_2 - 1)$ равна нулю

$$\sum_{u=1}^{N_{\delta}} x_{su} = 0, \quad (1.9)$$

условия ортогональности – сумма произведений элементов любых двух столбцов матрицы планирования равна нулю

$$\sum_{u=1}^{N_{\delta}} x_{su} x_{qu} = 0, \quad (1.10)$$

где s и q номера столбцов матрицы планирования ($s \neq q$), $s, q = 1 \dots N_2 - 1$.

Выполнение указанных условий симметричности и ортогональности достигается выбором величины звездного плеча d и линейным преобразованием квадратичной переменной путем ее смещения на величину φ (т.е. вместо переменной x_i^2 рассматривается переменная $x_i^2 - \varphi$).

Покажем возможность выполнения этих условий на примере ОЦКП для двух факторов, который приведен в табл. 1.2, а его геометрическая интерпретация показана на рис. 1.1а.

В табл. 1.2 в столбце 1 указан тип точек факторного пространства, столбцы 3 – 8 содержат значения переменных, их квадратов и произведений. Столбец 9 содержит средние значения отклика, вычисленные по результатам m параллельных опытов, проведенных в каждой точке факторного пространства.

Для анализа выполнимости условия симметрии (1.9) вычислим суммы элементов каждого столбца матрицы планирования:

для столбца x_1 : $-1 + 1 - 1 + 1 - d + d + 0 + 0 + 0 = 0$;

для столбца x_2 : $-1 - 1 + 1 + 1 + 0 + 0 - d + d + 0 = 0$;

для столбца $x_1^2 - \varphi$: $(1 - \varphi) + (1 - \varphi) + (1 - \varphi) + (1 - \varphi) + (d^2 - \varphi) + (d^2 - \varphi) - \varphi - \varphi - \varphi = 4(1 - \varphi) + 2(d^2 - \varphi) - 3\varphi = 4 + 2d^2 - 9\varphi$;

для столбца $x_2^2 - \varphi$: $(1 - \varphi) + (1 - \varphi) + (1 - \varphi) + (1 - \varphi) - \varphi - \varphi$
 $+ (d^2 - \varphi) + (d^2 - \varphi) - \varphi = 4(1 - \varphi) + 2(d^2 - \varphi) - 3\varphi = 4 + 2d^2 - 9\varphi$;
 для столбца x_1x_2 : $+1 - 1 - 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$.

Таблица 1.2 – ОЦКП второго порядка для двух факторов

Тип точек факторного пространства	Номер точки, i	x_0	x_1	x_2	$x_1^2 - \varphi$	$x_2^2 - \varphi$	x_1x_2	\bar{y}
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Точки ПФЭ 2^2	1	+1	-1	-1	$1 - \varphi$	$1 - \varphi$	+1	\bar{y}_1
	2	+1	+1	-1	$1 - \varphi$	$1 - \varphi$	-1	\bar{y}_2
	3	+1	-1	+1	$1 - \varphi$	$1 - \varphi$	-1	\bar{y}_3
	4	+1	+1	+1	$1 - \varphi$	$1 - \varphi$	+1	\bar{y}_4
Звездные точки	5	+1	$-d$	0	$d^2 - \varphi$	$-\varphi$	0	\bar{y}_5
	6	+1	$+d$	0	$d^2 - \varphi$	$-\varphi$	0	\bar{y}_6
	7	+1	0	$-d$	$-\varphi$	$d^2 - \varphi$	0	\bar{y}_7
	8	+1	0	$+d$	$-\varphi$	$d^2 - \varphi$	0	\bar{y}_8
Нулевая точка	9	+1	0	0	$-\varphi$	$-\varphi$	0	\bar{y}_9

Из проведенных вычислений следует, что условие симметрии (1.9) может быть удовлетворено, если сумма элементов при квадратичных переменных равна нулю

$$4 + 2d^2 - 9\varphi = 0. \quad (1.11)$$

Для анализа выполнимости условия ортогональности (1.10) вычислим суммы произведений элементов двух столбцов матрицы планирования:

для столбца x_1 и столбца x_2 : $\sum_{u=1}^9 x_{1u} x_{2u} = 0$;

для столбца x_1 и столбца $x_1^2 - \varphi$: $\sum_{u=1}^9 x_{1u} (x_{1u}^2 - \varphi) = 0$;

для столбца x_1 и столбца $x_2^2 - \varphi$: $\sum_{u=1}^9 x_{1u} (x_{2u}^2 - \varphi) = 0$;

для столбца x_2 и столбца $x_1^2 - \varphi$: $\sum_{u=1}^9 x_{2u} (x_{1u}^2 - \varphi) = 0$;

для столбца x_2 и столбца $x_2^2 - \varphi$: $\sum_{u=1}^9 x_{2u} (x_{2u}^2 - \varphi) = 0$;

для столбца $x_1^2 - \varphi$ и столбца $x_2^2 - \varphi$: $(1 - \varphi)(1 - \varphi) + (1 - \varphi)(1 - \varphi) + (1 - \varphi)(1 - \varphi) + (d^2 - \varphi)(-\varphi) + (d^2 - \varphi)(-\varphi) + (-\varphi)(d^2 - \varphi) + (-\varphi)(d^2 - \varphi) + (-\varphi)(-\varphi) = 4(1 - \varphi)^2 - 4\varphi(d^2 - \varphi) + \varphi^2$.

Из проведенных вычислений следует, что условие ортогональности (1.10) может быть удовлетворено, если сумма произведений элементов столбцов квадратичных переменных равна нулю

$$4(1 - \varphi)^2 - 4\varphi(d^2 - \varphi) + \varphi^2 = 0. \quad (1.12)$$

Решим совместно уравнения (1.11) и (1.12). Из (1.11) находим

$$d^2 = 9\varphi / 2 - 2 \quad (1.13)$$

и, подставляя в уравнение (1.12), получим $\varphi = 2/3$. После подстановки φ в (1.13) окончательно находим $d = 1$.

Проводя аналогичные вычисления для ОЦКП второго порядка с произвольным количеством переменных, можно показать, что в об-

щем случае величина звездного плеча d и параметр смещения ϕ определяются по нижеприведенным формулам

♦ для ядра вида ПФЭ 2^k

$$\phi = \sqrt{\frac{2^k}{N_{\phi}}}, \quad d = \sqrt{\frac{N_{\phi}\phi - 2^k}{2}}, \quad (1.14)$$

♦ для ядра вида полуреplik ДФЭ 2^{k-1}

$$\phi = \sqrt{\frac{2^{k-1}}{N_{\phi}}}, \quad d = \sqrt{\frac{N_{\phi}\phi - 2^{k-1}}{2}}. \quad (1.15)$$

В табл. 1.3 приведены d и ϕ значения для $k \leq 7$.

Из данных, приведенных в табл. 1.3 видно, что при большом числе факторов для сокращения объема проводимых опытов целесообразно в качестве ядра ОЦКП использовать ДФЭ.

По данным ОЦКП можно построить уравнение регрессии вида

$$\hat{y} = b_o^* + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} (x_i^2 - \phi). \quad (1.16)$$

Таблица 1.3 – Параметры ОЦКП второго порядка

Ядро плана	Общее количество точек в факторном пространстве, N_u	Звездное плечо, d	Параметр смещения, ϕ
1	2	3	4
2^2	9	1,0000	$2/3 \approx 0,6667$
2^3	15	1,2154	$\sqrt{8/15} \approx 0,7303$

Продолжение таблицы 1.3

1	2	3	4
2^4	25	1,4142	$4/5 \approx 0,8$
2^{5-1}	27	1,5467	$\frac{4\sqrt{3}}{9} \approx 0,7698$
2^5	43	1,5960	$\frac{4\sqrt{86}}{43} \approx 0,8627$
2^{6-1}	45	1,7244	$\frac{4\sqrt{10}}{15} \approx 0,8433$
2^6	77	1,7606	$8\sqrt{1/77} \approx 0,9117$
2^{7-1}	79	1,8848	$8\sqrt{1/79} \approx 0,9001$
2^7	143	1,9095	$8\sqrt{2/143} \approx 0,9461$

В силу ортогональности ОЦКП коэффициенты уравнения (1.16) определяются независимо друг от друга по общей формуле

$$b_q = \frac{\sum_{u=1}^{N_{\delta}} x_{qu} \bar{y}_u}{\sum_{u=1}^{N_{\delta}} x_{qu}^2}, \quad (1.17)$$

где q – условный номер переменной; b_q – коэффициенты уравнения равны: при $q=0$ $b_q=b_0^*$ – свободный член; при $q=1..k$ $b_q=b_i$ – коэффициенты при линейных слагаемых; при $q=k+1..2k$ $b_q=b_{ii}$ – коэф-

коэффициенты при квадратичных слагаемых; при $q=2k+1\dots N_{\delta}-1$ $b_q=b_{ij}$ – коэффициенты при парных взаимодействиях, сумма, стоящая в числителе является суммой произведений элементов столбца матрицы планирования на среднее значение отклика

$$\text{при } q=0 \quad \sum_{u=1}^{N_{\delta}} x_{qu} \bar{y}_u = \sum_{u=1}^{N_{\delta}} x_{0u} \bar{y}_u = \sum_{u=1}^{N_{\delta}} \bar{y}_u ;$$

$$\text{при } q=1\dots k \quad \sum_{u=1}^{N_{\delta}} x_{qu} \bar{y}_u = \sum_{u=1}^{N_{\delta}} x_{iu} \bar{y}_u ;$$

$$\text{при } q=k+1\dots 2k \quad \sum_{u=1}^{N_{\delta}} x_{qu} \bar{y}_u = \sum_{u=1}^{N_{\delta}} (x_{iu}^2 - \phi) \bar{y}_u ;$$

$$\text{при } q=2k+1\dots N_{\delta}-1 \quad \sum_{u=1}^{N_{\delta}} x_{qu} \bar{y}_u = \sum_{u=1}^{N_{\delta}} x_{iu} x_{ju} \bar{y}_u ,$$

сумма, стоящая в знаменателе является суммой квадратов элементов столбца матрицы планирования

$$\text{при } q=0 \quad \sum_{u=1}^{N_{\delta}} x_{qu}^2 = \sum_{u=1}^{N_{\delta}} x_{0u}^2 ;$$

$$\text{при } q=1\dots k \quad \sum_{u=1}^{N_{\delta}} x_{qu}^2 = \sum_{u=1}^{N_{\delta}} x_{iu}^2 ;$$

$$\text{при } q=k+1\dots 2k \quad \sum_{u=1}^{N_{\delta}} x_{qu}^2 = \sum_{u=1}^{N_{\delta}} (x_{iu}^2 - \phi)^2 ;$$

$$\text{при } s=2k+1\dots N_{\delta}+1 \quad \sum_{u=1}^{N_{\delta}} x_{su}^2 = \sum_{u=1}^{N_{\delta}} (x_{iu} x_{ju})^2 .$$

Вычислим эти суммы для ОЦКП, приведенного в табл. 1.2.

$$\begin{aligned}
\sum_{u=1}^{N_{\delta}} x_{0u}^2 &= 9; \quad \sum_{u=1}^{N_{\delta}} x_{1u}^2 = 4 + 2d^2; \quad \sum_{u=1}^{N_{\delta}} x_{2u}^2 = 4 + 2d^2; \quad \sum_{u=1}^{N_{\delta}} (x_1 x_2)^2 = 4; \\
\sum_{u=1}^{N_{\delta}} (x_{1u}^2 - \varphi)^2 &= 4(1-\varphi)^2 + 2(d^2 - \varphi)^2 + 3\varphi^2; \\
\sum_{u=1}^{N_{\delta}} (x_{2u}^2 - \varphi)^2 &= 4(1-\varphi)^2 + 2(d^2 - \varphi)^2 + 3\varphi^2.
\end{aligned}$$

Как показывают вычисления, в отличие от ПФЭ, знаменатель выражения для определения коэффициентов регрессии (1.17) не остается постоянным для различных q . Это означает, что для ОЦКП не выполняется условие нормировки. Проводя аналогичные вычисления для ОЦКП с произвольным количеством переменных, и подставляя вычисленные суммы в знаменатель выражения (1.17), получим частные формулы для определения коэффициентов регрессии

$$b_0^* = \frac{\sum_{u=1}^{N_{\delta}} x_{0u} \bar{y}_u}{N_{\delta}}; \quad (1.18)$$

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^{N_{\delta}} x_{iu} \bar{y}_u}{2^k + 2d^2}, \quad i=1, 2, \dots, k; \quad (1.19)$$

$$b_{ij} = \frac{\sum_{u=1}^{N_{\delta}} x_{iu} x_{ju} \bar{y}_u}{2^k}, \quad i \neq j; \quad (1.20)$$

$$b_{ii} = \frac{\sum_{u=1}^{N_{\delta}} (x_i^2 - \varphi) \bar{y}_u}{2^k (1-\varphi)^2 + 2(d^2 - \varphi)^2 + (2k-1)\varphi^2}. \quad (1.21)$$

Для удобства вычислений знаменатели выражений (1.18) – (1.21) для различных k сведены в табл. 1.4.

Таблица 1.4 – Значения знаменателей формул для b -коэффициентов

Столбец матрицы планирования	Выражение для суммы квадратов	Значение $\sum_{u=1}^{N_{\delta}} x_{qu}^2$ при ядре типа			
		2^2	2^3	2^4	2^5
1	2	3	4	5	6
x_{0u}	$N_{\delta} = 2^k + 2k + 1$	9	15	25	43
x_{iu}	$2^k + 2d^2$	6	10,95	20	37,09
$x_{iu} x_{ju}$	2^k	4	8	16	32
$x_i^2 - \varphi$	$2^k (1 - \varphi)^2 + 2(d^2 - \varphi)^2 + (2k - 1)\varphi^2$	2	4,36	8	12,98

Определив коэффициенты регрессии, раскроем последнюю сумму в выражении (1.16) и получим уравнение регрессии в стандартной форме

$$\hat{y} = b_0 x_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2, \quad (1.22)$$

где

$$b_0 = b_0^* x_0 - \varphi \sum_{i=1}^k b_{ii} . \quad (1.23)$$

Уравнение (1.22) получено по результатам опытов, неизбежно имеющих ту или иную погрешность, связанную с измерениями. Поэтому прежде чем делать выводы на основании уравнения (1.22), необходимо выполнить его статистический анализ.

2. Статистический анализ уравнения регрессии второго порядка

В общем случае статистический анализ уравнения регрессии второго порядка производится таким же образом, как и линейного уравнения регрессии [3–5]. В настоящем пособии мы остановимся на двух моментах, имеющих отличие.

2.1. Проверка значимости коэффициентов регрессии

Применяя к выражению для определения величины коэффициентов регрессии (1.17) операцию взятия дисперсии [6], можем получить оценку дисперсии коэффициентов квадратичной модели:

♦ в общем виде

$$S_{b_q}^2 = \frac{S_y^2}{N_{\ddot{b}} \sum_{u=1}^m x_{qu}^2} , \quad (2.1)$$

♦ для свободного члена

$$S_{b_0^*}^2 = \frac{S_y^2}{m(2^k + 2k + 1)} , \quad (2.2)$$

♦ для коэффициентов линейных эффектов

$$S_{b_i}^2 = \frac{S_y^2}{m(2^k + 2d^2)}, \quad (2.3)$$

♦ для коэффициентов парных взаимодействий

$$S_{b_{ij}}^2 = \frac{S_y^2}{2^k m}, \quad (2.4)$$

♦ для коэффициентов при квадратах факторов

$$S_{b_{ii}}^2 = \frac{S_y^2}{m \left[2^k (1-\varphi)^2 + 2(d^2 - \varphi)^2 + (2k-1)\varphi \right]}. \quad (2.5)$$

Оценка дисперсии для коэффициента b_0 определяется из (1.23) и имеет вид

$$S_{b_0}^2 = S_{b_0^*} + \varphi^2 \sum_{i=0}^k S_{b_{ii}}^2, \quad (2.6)$$

где m – количество параллельных опытов в каждой точке факторного пространства (на каждом сочетании уровней факторов).

S_y^2 – оценка дисперсии воспроизводимости

$$S_y^2 = \frac{\sum_{u=1}^{N_{\bar{o}}} S_u^2}{N_{\bar{o}}} = \frac{\sum_{u=1}^{N_{\bar{o}}} \sum_{j=1}^m (y_{uj} - \bar{y}_u)^2}{N_{\bar{o}}(m-1)}. \quad (2.7)$$

Число степеней свободы f_b для оценок дисперсий всех коэффициентов одинаково и равно числу степеней свободы дисперсии воспроизводимости f_y .

$$f_y = N_y(m - 1). \quad (2.8)$$

Как видно из (2.1) – (2.6), в отличие от моделей ПФЭ и ДФЭ b -коэффициенты квадратичной модели имеют различные дисперсии, что является особенностью ОЦКП. Значимость b -коэффициентов определяется путем проверки основной статистической гипотезы H_0 : $\beta_q = M[b_q] = 0$ (математическое ожидание b_q -коэффициента являющегося оценкой β_q -коэффициента теоретической модели равно нулю), против альтернативной H_1 : $\beta_q = M[b_q] \neq 0$ (математическое ожидание b_q -коэффициента не равно нулю). При подтверждении основной статистической гипотезы H_0 коэффициент b_q признается незначимым и исключается из уравнения регрессии. В противном случае принимается альтернативная гипотеза H_1 , коэффициент b_q признается значимым и соответствующее ему слагаемое ($b_{ix}x_i$, $b_{ij}x_ix_j$ или b_{iix^2}) остается в уравнение регрессии. Практически проверка значимости b -коэффициентов производится в следующем порядке.

1. Задаемся уровнем значимости α (обычно $\alpha = 0,05$).
2. Определяем критическое значение $t_{кр} = t_{табл}$ по таблице распределения Стьюдента (см. приложение 3) исходя из числа степеней свободы $f_i = f_y = N_k(m - 1)$ и принятого уровня значимости α .
3. Определяем критическую величину $b_{ед_q} = t_{ед} S_{b_q}$ для четырех типов b -коэффициентов (2.1) – (2.6).
4. Проверяем выполнение условия $b_{ед_q} \geq |b_q|$. Если условие выполняется, то коэффициент признается незначимым, его величину принимают равной нулю и соответствующее ему слагаемое исключают из уравнения регрессии. Например, коэффициент при парном взаи-

модействии $b_{12} = 10,2$, $S_{b_{12}}^2 = 6,75$, $f_y = 18$, тогда $t_{кр} = 2,101$ (по приложению 3 при $\alpha = 0,05$), $b_{кр} = 14,18$, $b_{\text{ед}} > |b_{12}|$ коэффициент при парном взаимодействии не значим.

2.2. Проверка адекватности модели

Статистическая проверка адекватности модели второго порядка состоит в проверке гипотезы об однородности оценки дисперсии воспроизводимости – S_y^2 и оценки дисперсии адекватности – $S_{\text{аа}}^2$ по F -критерию (Р. Фишера). А именно проверяется основная гипотеза H_0 : $S_{\text{аа}}^2 = S_y^2$ (оценка дисперсии адекватности, характеризующая рассеивание экспериментальных значений относительно значений, полученных с помощью модели, равна оценке дисперсии воспроизводимости, характеризующей рассеивание экспериментальных точек относительно построчных средних) при конкурирующей гипотезе H_1 : $S_{\text{аа}}^2 > S_y^2$. При этом полагается, что расчетные значения оценок дисперсии связаны соотношением $S_{\text{аа}}^2 > S_y^2$.

Предположим, что в результате проверки значимости b -коэффициентов в уравнении регрессии (1.14) значимыми оказались g коэффициентов. Тогда оценка дисперсии адекватности определяется по формуле

$$S_{\text{аа}}^2 = \frac{m}{N_{\text{д}} - g} \sum_{u=1}^{N_{\text{д}}} (\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2, \quad (2.9)$$

где \bar{y}_u – среднее значение отклика на u сочетании уровней факторов; \hat{y}_u – расчетное значение отклика на u сочетании уровней факторов.

Число степеней свободы оценки дисперсии адекватности равно

$$f_{\text{аа}} = N_{\sigma} - g . \quad (2.10)$$

Практически проверка адекватности модели производится в следующем порядке:

1. Определяется расчетное значение F -критерия

$$F_{\text{д\text{а}н\text{д}}} = \frac{S_{\text{аа}}^2}{S_y^2} , \quad (2.11)$$

при этом предполагается, что $S_{\text{аа}}^2 > S_y^2$ (в числителе должна находиться оценка большей дисперсии).

2. Задаемся уровнем значимости α (обычно $\alpha = 0,05$).

3. По таблице F -распределения (см. приложение 4) для принятого значения α и числа степеней свободы оценки дисперсии воспроизводимости – f_y и оценки дисперсии адекватности – $f_{\text{аа}}$ определяем критическое значение F -критерия $F_{\text{кр}}$.

4. Производим сравнение расчетного и критического значений F -критерия.

Если $F_{\text{расч}} < F_{\text{кр}}$, то считается, что нет оснований отвергать нулевую гипотезу, модель признается адекватной и ее можно использовать для дальнейшего анализа. В противном случае модель признается не адекватной, и принимаются меры для совершенствования модели. Например, $S_{\text{аа}}^2 = 105,3$, $f_{\text{ад}} = 5$, $S_y^2 = 86,8$, $f_y = 18$, тогда $F_{\text{расч}} = 1,21$, $F_{\text{кр}} = 2,77$ (по приложению 4 при $\alpha = 0,05$), $F_{\text{расч}} < F_{\text{кр}}$ модель адекватна.

При проведении компьютерных экспериментов возникают ситуации, когда повторные эксперименты дают один и тот же результат. В этом случае для проверки адекватности модели используют принцип "допускового контроля". Модель признается адекватной, если абсолютная величина разности между результатами компьютерных экспериментов и предсказанными значениями отклика во всех опыт-

ных точках $u = 1, 2, \dots, N$ не превышают некоторого допуска δ [5], то есть имеет место соотношение $|y_u - \hat{y}_u| \leq \delta$.

3. Переход к физическим переменным

После подтверждения адекватности уравнение

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2 \quad (3.1)$$

можно использовать для проведения расчетов и анализа поведения отклика в зависимости от кодированных переменных x_i в области $-d \leq x_i \leq d$, а также для прогнозирования поведения отклика за пределами указанной области. Отдельные b -коэффициенты в (3.1) могут оказаться незначимыми, и приняты равными нулю. Непосредственное использование (3.1) неудобно, так как в практической деятельности, мы чаще всего, используем физические переменные. Преобразуем (3.1) к виду, допускающему использование физических переменных.

Как известно, связь кодированных и физических переменных устанавливается соотношением вид [3]

$$x_i = \frac{X_i - \bar{X}_i}{h_i}, \quad (3.2)$$

где x_i – значение i -й кодированной переменной; X_i – значение i -й физической переменной; \bar{X}_i – среднее значение i -й физической переменной; h_i – шаг изменения i -й физической переменной.

Тогда слагаемые, используемые в выражении (3.1), имеют вид:

$$\begin{aligned}
b_i x_i &= \frac{b_i}{h_i} X_i - \frac{b_i}{h_i} \bar{X}_i ; \\
b_{ij} x_i x_j &= \frac{b_{ij}}{h_i h_j} X_i X_j - \frac{b_{ij} \bar{X}_j}{h_i h_j} X_i - \frac{b_{ij} \bar{X}_i}{h_i h_j} X_j - \frac{b_{ij} \bar{X}_i \bar{X}_j}{h_i h_j} ; \\
b_{ii} x_i^2 &= \frac{b_{ii}}{h_i^2} X_i^2 - \frac{2b_{ii} \bar{X}_i}{h_i^2} X_i + \frac{b_{ii} \bar{X}_i^2}{h_i^2} .
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Подставив их в (3.1), получим уравнение регрессии для физических переменных

$$\hat{Y} = B_0 + \sum_{i=1}^k B_i X_i + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k B_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^k B_{ii} X_i^2 , \tag{3.4}$$

где В-коэффициенты определяются по следующим выражениям:

$$\begin{aligned}
B_0 &= b_0 - \sum_{i=1}^k \frac{b_i \bar{X}_i}{h_i} + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \frac{b_{ij} \bar{X}_i \bar{X}_j}{h_i h_j} + \sum_{i=1}^k \frac{b_{ii} \bar{X}_i^2}{h_i^2} ; \\
B_i &= \frac{b_i}{h_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \frac{\bar{X}_j}{h_i h_j} \times \left\{ b_{ij}, \text{ а } \bar{X}_j \text{ } i < j \right\} \left\{ b_{ji}, \text{ а } \bar{X}_j \text{ } i > j \right\} - \frac{2b_{ii} \bar{X}_i}{h_i^2} ; \\
B_{ij} &= \frac{b_{ij}}{h_i h_j} ; \quad B_{ii} = \frac{b_{ii}}{h_i^2} .
\end{aligned}$$

Уравнение (3.4) адекватно описывает поведение отклика в следующей области изменения физических переменных: $X_i - dh_i \leq X_i \leq X_i + dh_i$.

При практическом использовании выражения (3.4) следует обращать внимание на размерность физических переменных: она должна быть такой же, как размерность средних значений физических переменных \bar{X}_i при подстановке в (3.3).

4. Анализ квадратичной модели

В технике и электрофизике высоких напряжений планирование эксперимента может использоваться для решения ряда задач, основными из которых являются:

- построение адекватной математической модели в некоторой области изменения входных параметров и проведение дальнейших исследований на модели;

- целенаправленное определение экстремального (максимального или минимального) значения отклика в некоторой области изменения входных параметров.

Решение этих задач базируется на изучении вида поверхности отклика, что включает в себя исследование поверхности отклика на экстремум. Из курса высшей математики [7] известно, что всякая дифференцируемая функция нескольких переменных может достигать экстремума только в тех точках, в которых все ее частные производные обращаются в нуль (стационарные точки).

Определим стационарные точки для случая двух переменных. Уравнение (3.4) при $k = 2$ имеет вид

$$\hat{Y} = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_{12} X_1 X_2 + B_{11} X_1^2 + B_{22} X_2^2. \quad (4.1)$$

Дифференцируя (4.1) по переменным X_1 и X_2 и приравнявая частные производные нулю, получим систему уравнений

$$\begin{cases} B_1 + B_{12} X_2 + 2B_{11} X_1 = 0 \\ B_2 + B_{12} X_1 + 2B_{22} X_2 = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Решение системы (4.2) является координатами стационарной точки

$$X_{1CT} = \frac{B_2 B_{12} - 2B_1 B_{22}}{4B_{11} B_{22} - B_{12}^2}; \quad (4.3)$$

$$X_{2CT} = \frac{B_1 B_{12} - 2B_2 B_{11}}{4B_{11} B_{22} - B_{12}^2}. \quad (4.4)$$

В курсе высшей математики [7] доказывается, что в стационарных точках функция двух переменных имеет экстремум при выполнении ряда условий (достаточные условия экстремума). Пусть

$$r = \frac{\partial^2 \hat{Y}}{\partial X_1^2}, \quad s = \frac{\partial^2 \hat{Y}}{\partial X_1 \partial X_2}, \quad t = \frac{\partial^2 \hat{Y}}{\partial X_2^2}, \quad \Delta = r \cdot t - s^2.$$

Тогда, если

а) $\Delta > 0$ и $r > 0$, то в стационарной точке имеет место минимальное значение отклика;

б) $\Delta > 0$ и $r < 0$, то в стационарной точке имеет место максимальное значение отклика;

в) $\Delta < 0$, то в стационарной точке экстремума нет;

г) $\Delta = 0$ требуются дополнительные исследования.

Для уравнения (4.1) имеем

$$r = \frac{\partial^2 \hat{Y}}{\partial X_1^2} = 2B_{11}, \quad s = \frac{\partial^2 \hat{Y}}{\partial X_1 \partial X_2} = B_{12}, \quad t = \frac{\partial^2 \hat{Y}}{\partial X_2^2} = 2B_{22},$$

$$\Delta = r \cdot t - s^2 = 4B_{11} B_{22} - B_{12}^2.$$

Тогда условия наличия в стационарной точке минимума отклика имеют вид:

$$\begin{cases} 4B_{11} B_{22} - B_{12}^2 > 0 \\ B_{11} > 0 \end{cases}, \quad (4.5)$$

условия наличия максимума:

$$\begin{cases} 4B_{11} B_{22} - B_{12}^2 > 0 \\ B_{11} < 0 \end{cases}. \quad (4.6)$$

Исследование отклика для случая большого количества факторов ($k \geq 3$) проводится аналогично, но требует применения более сложных вычислительных методов и методов исследования функций.

5. Оптимизация стержневого молниеотвода, защищающего группу сооружений

Описание задачи. Группу сооружений, каждое из которых имеет форму прямой призмы, необходимо защитить стержневым молниеотводом (МО) от прямого поражения молнией. С экономической точки зрения естественно потребовать, чтобы данный стержневой МО имел минимально возможную высоту. Отметим, что если такой стержневой молниеотвод существует, то его вертикальная ось проходит через точку плоскости XOY , которая находится внутри области, ограниченной расположением сооружений (на рис. 5.1 область показана пунктиром). При этом подразумевается, что МО могут быть установлен как отдельно от сооружений, так и на их крыше.

Зона защиты молниеотвода (ЗЗМ) конусообразной формы, показанная на рис. 5.2, характеризуется высотой конуса H_0 и радиусом основания R_0 (H_0 и R_0 определяются в зависимости от уровня надежности и высоты МО по данным, приведенным в табл. 5.1 [8]).

Тогда сооружение в виде прямой призмы является защищенным, если защищены все боковые ребра этого сооружения. Как видно из рис. 5.3, если защищено самое удаленное ребро 3, то защищены и все остальные ребра сооружения, так как на высоте анализа, равной высоте сооружения выполняются условия $R_1 < R_2 < R_4 < R_3 = R_{HA}$. Это позволяет контролировать защищенность группы сооружений путем контроля защищенности совокупности объектов-стержней, каждый из которых является боковым ребром сооружения (прямой призмы).

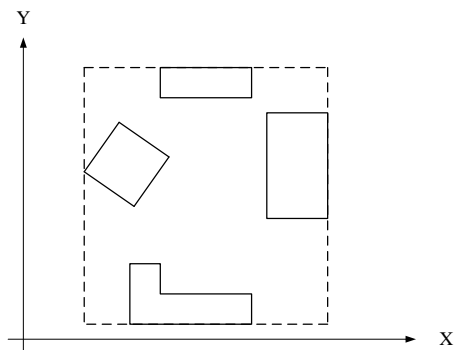


Рисунок 5.1 – План расположения группы сооружений

Таблица 5.1 – Параметры зоны защиты

Надежность защиты, P_z	Высота молниеотвода H , м	Высота конуса H_0 , м	Радиус конуса на уровне грунта R_0 , м
1	2	3	4
0,9	от 0 до 100	$0,85H$	$1,2H$
	от 100 до 150	$0,85H$	$[1,2 - 1 \cdot 10^{-3}(H - 100)]H$
0,95	от 0 до 150	$0,92H$	$1,5H$
	от 150 до 600	$[0,92 - 0,8 \cdot 10^{-3}(H - 150)]H$	225
0,99	от 0 до 30	$0,8H$	$0,8H$
	от 30 до 100	$0,8H$	$[0,8 - 1,43 \cdot 10^{-3}(H - 30)]H$
	от 100 до 150	$[0,8 - 1 \cdot 10^{-3}(H - 100)]H$	$0,7H$
0,995	от 0 до 150	$0,85H$	$(1,1 - 0,002H)H$
	от 150 до 600	$[0,85 - 1,7 \cdot 10^{-3}(H - 150)]H$	$[0,8 - 1,8 \cdot 10^{-3}(H - 150)]H$
0,999	от 0 до 30	$0,7H$	$0,6H$
	от 30 до 100	$[0,7 - 7,14 \cdot 10^{-4}(H - 30)]H$	$[0,6 - 1,43 \cdot 10^{-3}(H - 30)]H$
	от 100 до 150	$[0,65 - 1 \cdot 10^{-3}(H - 100)]H$	$[0,5 - 2 \cdot 10^{-3}(H - 100)]H$

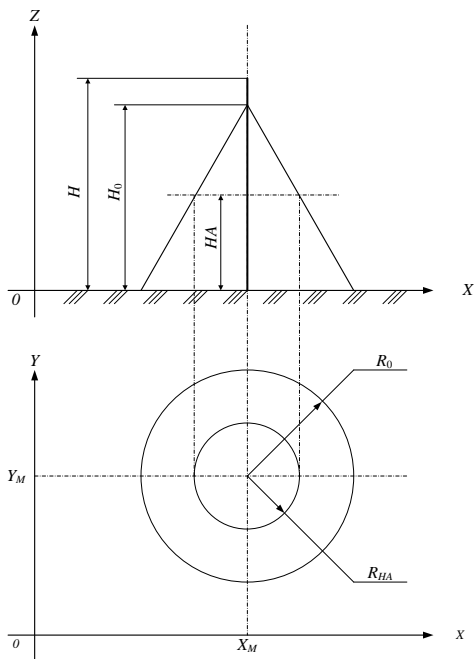


Рисунок 5.2 – Зона защиты одиночного стержневого МО.

H – высота МО; H_0 , R_0 – параметры зоны защиты; H_A – высота анализа; R_{HA} – радиус зоны защиты на высоте анализа; X_M , Y_M – координаты размещения МО

Тогда процесс определения МО минимальной высоты, защищающего группу сооружений, может быть сведен к следующей пошаговой процедуре. Для МО с заданными координатами X_M и Y_M устанавливается некоторая минимальная высота, априори не обеспечивающая защиту всех сооружений (например, равная наибольшей из высот всех сооружений). Далее увеличиваем высоту МО на ΔH и проверяем защищенность всех объектов-стержней. Увеличение высоты прекращается, как только все объекты-стержни будут защищены. Этот МО, с точностью

до шага изменения высоты ΔH , является МО минимальной высоты, расположенным в точке (X_M, Y_M) , который обеспечивает защиту группы сооружений.

Высота ЗЗМ определяется по соотношению [8]:

$$Z = H_0 \left[1 - \frac{\sqrt{(X - X_M)^2 + (Y - Y_M)^2}}{R_0} \right], \quad (5.1)$$

где X, Y – координаты объекта-стержня; X_M, Y_M – координаты МО; H_0, R_0 – параметры формы ЗЗМ, определяемые из табл. 5.1.

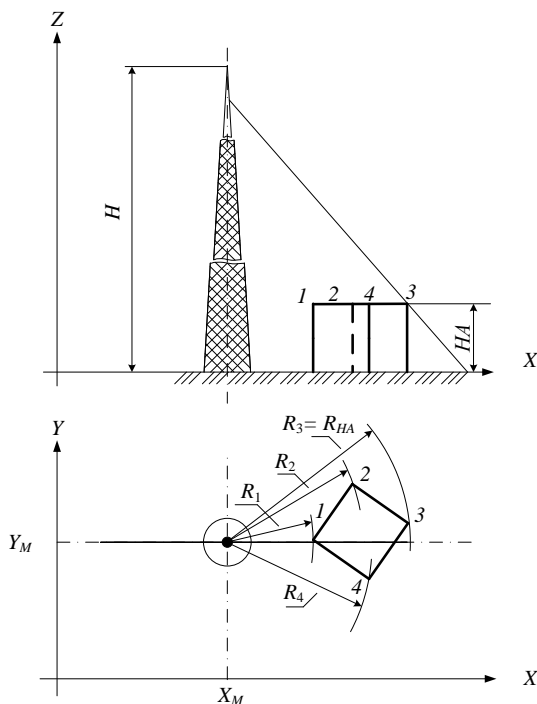


Рисунок 5.3 – Защита сооружения в виде прямой призмы одиночным стержневым МО

Формула (5.1) справедлива, если выполняются следующие условия

$$\begin{cases} X_M - R_0 \leq X \leq X_M + R_0, \\ Y_M - \sqrt{R_0^2 - (X - X_M)^2} \leq Y \leq Y_M + \sqrt{R_0^2 - (X - X_M)^2}. \end{cases} \quad (5.2)$$

В противном случае $Z = 0$.

Под оптимизацией стержневого МО в данной задаче понимается определение положения МО, при котором он защищает группу сооружений и является самым низким МО из всех возможных МО минимальной высоты в исследуемой области. Рассмотрим процедуру оптимизации МО на следующем примере.

Пример 5.1.

Условие задачи. Имеется группа, состоящая из трех сооружений, каждое из которых представляет собой прямую призму, показанных на рис. 5.4. Координаты боковых ребер сооружений (объектов-стержней) и их высоты приведены в табл. 5.2. В последних двух строках указаны \min и \max значения координат из всех объектов-стержней. Требуется определить положение одиночного стержневого МО, при котором его высота будет наименьшей из всех возможных МО минимальной высоты, защищающих систему сооружений. Требуемая надежность молниезащиты группы сооружений $P_3 = 0,95$.

Решение. Так как высота оптимального МО при заданных условиях определяется двумя факторами: X и Y – координатами его расположения, в качестве ядра ОЦКП второго порядка принимаем план ПФЭ 2^2 . Границы прямоугольной области исследования определим исходя из \min и \max значений координат объектов-стержней, приведенных в табл. 5.2. Проведем кодирование координат расположения МО с использованием (2.13). Учитывая, что для ОЦКП с ядром плана вида ПФЭ 2^2 $d = 1$ (см. табл. 1.3), границами области исследования будут являться нижний и верхний уровни изменения соответствующих факторов. Результаты кодирования приведены в табл. 5.3.

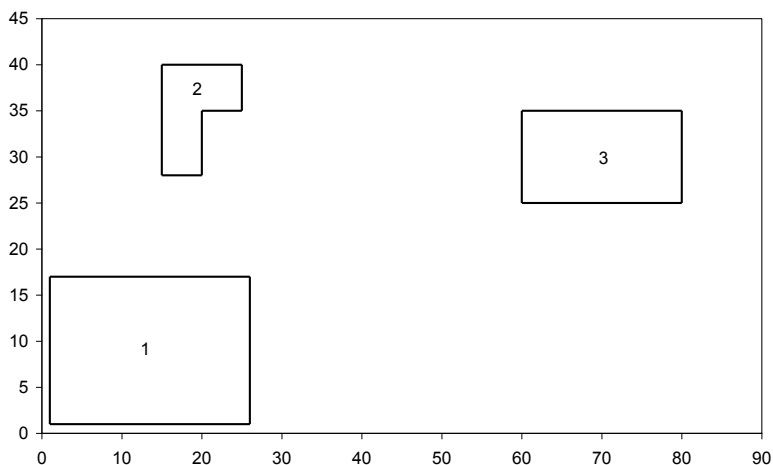


Рисунок 5.4 – План расположения сооружений:
1, 2, 3 – номера сооружений

Таблица 5.2 – Координаты ребер сооружений

Номер сооружения	Номер объ-екта-стержня	X координата расположения	Y координата расположения	Высота
1	2	3	4	5
1	1	1	1	30
	2	1	17	
	3	26	17	
	4	26	1	
2	5	15	28	60
	6	15	40	
	7	25	40	
	8	25	35	
	9	20	35	
	10	20	28	

Продолжение таблицы 5.2

1	2	3	4	5
3	11	60	25	20
	12	60	35	
	13	80	35	
	14	80	25	
min		1	1	
max		80	40	

Таблица 5.3 – Кодирование факторов

Наименование фактора	Обозначение фактора	Кодированное обозначение фактора	Интервал, h_i	Уровни		
				-1	0	1
1	2	3	4	5	6	7
X - координата расположения МО, м	X	x_1	39,5	1	40,5	80
Y - координата расположения МО, м	Y	x_2	19,5	1	20,5	40

В табл. 5.4 приведен ОЦКП для решения рассматриваемой задачи. (Для удобства восприятия материала в продолжении табл. 6.3 повторен второй столбец). Элементы всех столбцов таблицы аналогичны приведенным в табл. 1.2. В данном примере столбец 9 содержит $\bar{y}=H_{\min}$ – высоты МО минимальной высоты, рассчитанные для соответствующих уровней факторов, приведенных в столбцах 4 и 5. Вычисление H_{\min} производится в соответствии с шаговой процедурой, приведенной в описании задачи.

Таблица 5.4 – ОЦКП

Тип точек факторного пространства	Номер точки, u	x_0	x_1	x_2
1	2	3	4	5
Точки ПФЭ 2^2	1	1	-1	-1
	2	1	1	-1
	3	1	-1	1
	4	1	1	1
Звездные точки	5	1	-1	0
	6	1	1	0
	7	1	0	-1
	8	1	0	1
Нулевая точка	9	1	0	0
$\sum_u(\bullet)$	-	9	6	6

Продолжение таблицы 5.4

Номер точки, u	$x_1^2 - \phi$	$x_2^2 - \phi$	$x_1 x_2$	\bar{y}
2	6	7	8	9
1	1/3	1/3	1	95,8
2	1/3	1/3	-1	115,8
3	1/3	1/3	-1	81,6
4	1/3	1/3	1	109,3
5	1/3	-2/3	0	85,9
6	1/3	-2/3	0	110,5
7	-2/3	1/3	0	96,3
8	-2/3	1/3	0	84,1
9	-2/3	-2/3	0	86,7
-	2	2	4	866,0

Результаты дальнейших расчетов сведены в табл. 5.5. В последней строке таблицы приведены суммы всех элементов соответствующих столбцов, необходимые для определения b -коэффициентов.

Таблица 5.5 – Результаты расчетов

Номер точки, u	$x_0 \bar{y}$	$x_1 \bar{y}$	$x_2 \bar{y}$	$(x_1^2 - \varphi) \bar{y}$	$(x_1^2 - \varphi) \bar{y}$	$x_1 x_2 \bar{y}$
1	2	3	4	5	6	7
1	95,8	-95,8	-95,8	31,9	31,9	95,8
2	115,8	115,8	-115,8	38,6	38,6	-115,8
3	81,6	-81,6	81,6	27,2	27,2	-81,6
4	109,3	109,3	109,3	36,4	36,4	109,3
5	85,9	-85,9	0	28,6	-57,3	0
6	110,5	110,5	0	36,8	73,7	0
7	96,3	0	-96,3	-64,2	32,1	0
8	84,1	0	84,1	-56,1	28,0	0
9	86,7	0	0	-57,8	-57,8	0
Σ	866,0	72,3	-32,9	21,57	5,57	7,7

Значения b -коэффициентов, рассчитанные по формулам (1.18) ... (1.21), приведены в табл. 5.6.

Свободный член для уравнения регрессии в стандартном виде (1.22) определяем по формуле (1.23)

$$b_0 = 87,1778.$$

Далее произведем переход к физическим переменным в соответствии с (2.15). Тогда, в конечном виде, уравнение для определения H_{\min} – высоты МО минимальной высоты в зависимости координат его расположения имеет вид

$$\hat{H}_{\min} = 97,0746 - 0,306X - 0,6825Y + 0,0025XY + 0,0069X^2 + 0,0073Y^2. \quad (5.3)$$

Таблица 5.6 – Значения коэффициентов

b_0^*	b_1	b_2	b_{11}	b_{22}	b_{12}
96,22	12,05	-5,48	10,78	2,78	1,93

В табл. 5.7 приведен расчет погрешностей вычислений по уравнению регрессии

– абсолютная погрешность $\delta = |H_{\min} - \hat{H}_{\min}|$;

– относительная погрешность $\Delta = 100 \frac{\delta}{\hat{H}_{\min}}$.

Последняя строка табл. 5.7 содержит значения максимальной абсолютной и относительной погрешности.

Таблица 5.7 – Расчет погрешностей

X	Y	\hat{H}_{\min}	δ	$\Delta, \%$
1	2	3	4	5
1	1	96,1	0,30	0,32
80	1	116,35	0,55	0,48
1	40	81,29	0,31	0,39
80	40	109,24	0,06	0,06
1	21	85,91	0,01	0,01
80	21	110,01	0,49	0,44
41	1	95,44	0,86	0,90
41	40	84,48	0,38	0,45
41	21	87,18	0,48	0,55
max	–	–	0,856	0,896

Учитывая, что определение H_{\min} производится численными методами и вычисления при параллельных опытах дают один и тот же результат, а значит, отсутствует возможность определить дисперсию воспроизводимости, адекватность полученной модели \hat{H}_{\min} опреде-

лим исходя из максимальной погрешности вычислений, приведенных в табл. 5.7 (метод допускового контроля [5]). Будем считать, что модель адекватна исходным данным с абсолютной погрешностью $\delta = 0,856 \text{ м} \approx 1 \text{ м}$ (или с относительной погрешностью $\Delta = 0,896\% \approx 1\%$).

Определим координаты стационарной точки по выражениям (3.3) и (3.4)

$$X_{CT} = \frac{B_2 B_{12} - 2B_1 B_{22}}{4B_{11}B_{22} - B_{12}^2} = \frac{(-0,6825) \cdot 0,0025 - 2 \cdot (-0,306) \cdot 0,0037}{4 \cdot 0,0069 \cdot 0,0073 - 0,0025^2} \approx 2,86 \text{ м};$$

$$Y_{CT} = \frac{B_1 B_{12} - 2B_2 B_{11}}{4B_{11}B_{22} - B_{12}^2} = \frac{(-0,306) \cdot 0,0025 - 2 \cdot (-0,6825) \cdot 0,0069}{4 \cdot 0,0069 \cdot 0,0073 - 0,0025^2} \approx 44,32 \text{ м}.$$

Стационарная точка находится внутри исследуемой области. Исследуем стационарную точку на наличие экстремума.

$$r = 2B_{11} = 0,0138, \quad s = B_{12} = 0,0025, \quad t = 2B_{22} = 0,0146,$$

$$\Delta = 4B_{11}B_{22} - B_{12}^2 = 0,000195.$$

Так как $\Delta > 0$ и $r > 0$, то в стационарной точке имеет место минимум отклика. Если в этой точке установить МО, то он будет отвечать принятым условиям оптимальности. Из уравнения регрессии (4.3) определим значение высоты в стационарной точке $\hat{H}_{\min} = 80,7 \text{ м}$. Непосредственные расчеты с использованием пошаговой процедуры с $\Delta H = 0,1 \text{ м}$ показывают, что МО, размещенный в стационарной точке и защищающий группу сооружений, имеет $H_{\min} = 81,3 \text{ м}$. Как видно, погрешность не превышает принятой в условиях адекватности модели.

6. Построение моделей выходных параметров высоковольтных импульсных испытательных устройств

Описание задачи. Для имитации воздействия импульсов магнитного поля на технические средства используется высоковольтный генератор, схема разрядной цепи которого приведена на рис. 6.1 [9]. Процесс проектирования генератора требует установления связи выходных параметров импульса магнитного поля с параметрами элементов разрядной цепи.

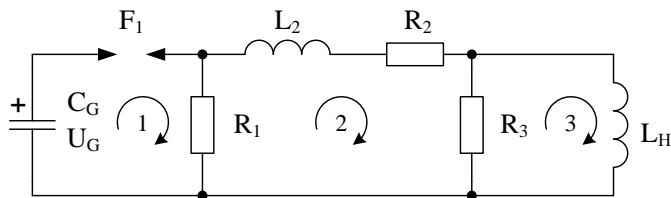


Рисунок 6.1 – Эквивалентная электрическая схема разрядной цепи генератора.

U_G , C_G – зарядное напряжение и емкость накопителя энергии; F_1 – коммутатор; R_1 , R_2 , R_3 – формирующие резисторы; L_2 – формирующая индуктивность; L_H – индуктивность системы полеобразования.

В генераторах, формирующих импульсы с микросекундной длительностью времени нарастания для испытания непротяженных объектов (например, генераторах импульсов тока), временные параметры импульса напряженности магнитного поля совпадают с временными параметрами импульса тока, протекающего в системе полеобразования, которая на схеме разрядной цепи представлена индуктивностью L_H .

Зависимость импульса тока, протекающего в L_H , может быть найдена из решения системы уравнений, описывающих переходный процесс в разрядной цепи генератора. По этой зависимости, показанной на рис. 6.2, определяются характерные точки: время достижения импульсом тока уровней $0,1i_{\text{MAX}}$ ($T_{\Phi 0,1}$), $0,9i_{\text{MAX}}$ ($T_{\Phi 0,9}$) на фронте и на

спаде $0,5i_{\text{MAX}}$ ($T_{C\ 0,5}$). С использованием этих точек определяются контролируемые параметры импульса тока (а, значит, и импульса напряженности магнитного поля), заданные в нормативных документах на испытание технических средств [9].

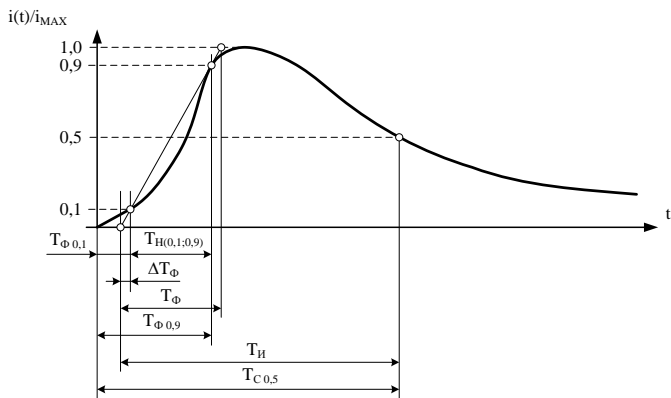


Рисунок 6.2 – Расшифровка импульса тока

Рассмотрим определение зависимости времени нарастания значений импульса тока $T_{Н(0,1;0,9)} = T_{Ф\ 0,9} - T_{Ф\ 0,1}$ от параметров схемы разрядной цепи. Система нормированных уравнений, описывающих переходный процесс в разрядной цепи генератора, имеет вид [10]:

$$\begin{cases} \int I_1 d\tau + r_1(I_1 - I_2) = 1; \\ L_{2H} \frac{dI_2}{d\tau} + (r_1 + r_2 + r_3)I_2 - r_1I_1 - r_3I_3 = 0; \\ r_3(I_3 - I_2) + \frac{dI_3}{d\tau} = 0, \end{cases} \quad (6.1)$$

где $\tau = \frac{t}{\sqrt{L_H C_G}}$ – безразмерный аналог времени; $r_k = \frac{R_k}{\sqrt{L_H / C_G}}$ –

безразмерные аналоги активных сопротивлений, $k = \overline{1,3}$; $I_J = \frac{i_J}{U_G} \sqrt{\frac{L_H}{C_G}}$

– безразмерные аналоги контурных токов, $J = \overline{1,3}$; $L_{2H} = L_2 / L_H$ – безразмерный аналог индуктивности; i_J – контурные токи; J – номер контура (направление обхода контуров показано на рис. 6.1).

Как видно из (6.1), переходный процесс в разрядной цепи зависит от четырех безразмерных параметров r_1, r_2, r_3, L_{2H} . Это означает, что реальные импульсы тока будут подобны, если безразмерные параметры имеют одно и то же значение вне зависимости от величины реальных параметров элементов разрядной цепи – $R_1, R_2, r_3, L_2, L_H, C_G$. Связь между безразмерной $I_3(\tau)$ и физической $i_3(t)$ зависимостью импульса тока определяется соотношениями

$$i_3(t) = I_3(\tau) U_G \sqrt{\frac{L_H}{C_G}} \text{ и } t = \tau \sqrt{L_H C_G},$$

где $I_3(\tau)$ – значения безразмерного тока, определенные в зависимости от τ , вычисленные из решения (6.1).

Установление связи выходных параметров импульса тока в системе полеобразования с параметрами элементов разрядной цепи рассмотрим на следующем примере.

Пример 6.1

Условие задачи. Необходимо построить математическую модель времени нарастания значений импульса тока $T_{H(0,1; 0,9)}$ (см. рис.6.2) в системе полеобразования L_H (см. рис.6.1) при следующих соотношениях между параметрами элементов разрядной цепи:

$$\begin{cases} r_1 = R_1 / \sqrt{L_H / C_G} = 10; & r_2 = R_2 / \sqrt{L_H / C_G} = 4-10; \\ r_3 = R_3 / \sqrt{L_H / C_G} = 0,1-0,5; & L_{2H} = L_2 / L_H = 2-10. \end{cases} \quad (6.2)$$

Решение. При заданных условиях безразмерное время нарастания $\tau_{H(0,1;0,9)} = T_{H(0,1;0,9)} / \sqrt{L_H C_G}$ зависит от трех безразмерных параметров r_2, r_3, L_{2H} , так как параметр r_1 принимает одно фиксированное значение. Это позволяет для построения квадратичной модели провести ОЦКП с ядром плана вида ПФЭ 2^3 , для которого, согласно табл. 1.3, звездное плечо $d = 1,2154$, а параметр смещения $\varphi = 0,7303$. Результаты кодирования факторов приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1 – Кодирование факторов

	Безразмерное сопротивление	Безразмерное сопротивление	Безразмерная индуктивность
Обозначение фактора	r_2	r_3	L_{2H}
Кодированное обозначение фактора	x_1	x_2	x_3
Интервал, h_i	2,4683	0,1646	3,2911
Уровни			
$-d$	4	0,1	2
-1	4,5317	0,1354	2,7089
0	7	0,3	6
1	9,4683	0,4646	9,2911
d	10	0,5	10

Значения интервалов факторов и уровней их варьирования определяются исходя из диапазона изменения безразмерных факторов (6.2), по следующим соотношениям (напомним, что, каждый из факторов изменяется на пяти уровнях: $-d, -1, 0, 1, d$):

для уровня $x_i = -d$ реальные значения безразмерных факторов, которые используются при вычислении $\tau_{H(0,1;0,9)}$ определяться как $X_{i-d} = X_{i\min}$; для уровня $x_i = d$ соответственно $X_{i+d} = X_{i\max}$; среднее значение факторов определим по выражению $X_{i\text{cp}} = (X_{i\max} + X_{i\min})/2$; шаг вычислим по формуле $h_i = (X_{i\max} - X_{i\min})/2d$; для уровней $x_i = \pm 1$ реальные значения безразмерных факторов определяться по общему правилу для ПФЭ $X_{i\pm 1} = X_{i\text{cp}} \pm h_i$.

В табл. 6.2 приведен ОЦКП для решения рассматриваемой задачи. В первом столбце таблицы указан тип точек факторного пространства. Второй столбец содержит номера точек факторного пространства. (В продолжении табл. 6.2 для удобства восприятия материала столбец 2 повторен.) Столбцы 3 – 6 содержат значения переменных в точках факторного пространства, столбцы 7 – 9 – смещенные на величину ϕ квадраты переменных. Значения элементов столбцов 10 – 12 получены перемножением соответствующих элементов столбцов 4 – 6. В столбце 13 приведены значения отклика y_u – соответствующие безразмерной длительности нарастания значений нормированного импульса тока $\tau_{H(0,1;0,9)}$, вычисленной при соответствующих значениях факторов (процедура определения $\tau_{H(0,1;0,9)}$ дана в описании данной задачи, а для ее практической реализации целесообразно использовать программные продукты Excel [11] и Micro-Cap [12]). Последняя строка таблицы содержит суммы квадратов элементов соответствующего столбца, необходимых для вычисления коэффициентов уравнения регрессии.

Результаты дальнейших расчетов сведены в табл. 6.3. (Для удобства восприятия материала в продолжении табл. 6.3 повторен первый столбец). В предпоследней строке таблицы приведены суммы элементов соответствующих столбцов. В последней строке таблицы приведены значения коэффициентов уравнения регрессии, вычисленные по соотношениям (1.18) – (1.21).

В табл. 6.4 приведен расчет относительной погрешности вычисления по уравнению регрессии

$$\Delta = 100 \frac{|y_u - y_{pu}|}{y_{pu}}, \quad (6.3)$$

где y_u – значения безразмерной длительности нарастания нормированного импульса тока $\tau_{H(0,1;0,9)}$, приведенные в столбце 13 табл. 6.2; y_{pu} – значения безразмерной длительности нарастания, вычисленные по уравнению регрессии.

Таблица 6.2 – Пример ОЦКП

Тип точек факторного пространства	Номер точки, u	x_0	x_1	x_2	x_3
1	2	3	4	5	6
Точки ПФЭ 2^3	1	1	-1	-1	-1
	2	1	1	-1	-1
	3	1	-1	1	-1
	4	1	1	1	-1
	5	1	-1	-1	1
	6	1	1	-1	1
	7	1	-1	1	1
	8	1	1	1	1
Звездные точки	9	1	-1,2154	0	0
	10	1	1,2154	0	0
	11	1	0	-1,2154	0
	12	1	0	1,2154	0
	13	1	0	0	-1,2154
	14	1	0	0	1,2154
Нулевая точка	15	1	0	0	0
$\sum_u (\bullet)^2$	–	15,00	10,954	10,954	10,954

Продолжение таблицы 6.2

Номер точки, u	$x_1^2 - \varphi$	$x_2^2 - \varphi$	$x_3^2 - \varphi$	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	y_u
2	7	8	9	10	11	12	13
1	0,2697	0,2697	0,2697	1	1	1	2,51
2	0,2697	0,2697	0,2697	-1	-1	1	2,86
3	0,2697	0,2697	0,2697	-1	1	-1	3,88
4	0,2697	0,2697	0,2697	1	-1	-1	3,96
5	0,2697	0,2697	0,2697	1	-1	-1	1,94
6	0,2697	0,2697	0,2697	-1	1	-1	1,90
7	0,2697	0,2697	0,2697	-1	-1	1	3,42
8	0,2697	0,2697	0,2697	1	1	1	2,83
9	0,7469	-0,7303	-0,7303	0	0	0	2,65
10	0,7469	-0,7303	-0,7303	0	0	0	2,80
11	-0,7303	0,7469	-0,7303	0	0	0	2,24
12	-0,7303	0,7469	-0,7303	0	0	0	3,82
13	-0,7303	-0,7303	0,7469	0	0	0	3,13
14	-0,7303	-0,7303	0,7469	0	0	0	2,24
15	-0,7303	-0,7303	-0,7303	0	0	0	2,68
	4,364	4,364	4,364	8,00	8,00	8,00	—

Учитывая, что определение y_u производится численными методами и вычисления при параллельных опытах дают один и тот же результат, а значит, отсутствует возможность определить дисперсию воспроизводимости, адекватность полученной модели $\tau_{H(0,1;0,9)}$ определим исходя из максимальной погрешности вычислений, приведенных в табл. 6.4 (метод допускового контроля [5]).

Таблица 6.3 – Результаты расчета

Номер точки, u	$x_0 y_u$	$x_1 y_u$	$x_2 y_u$	$x_3 y_u$	$(x_1^2 - \varphi) y_u$	$(x_2^2 - \varphi) y_u$
1	2	3	4	5	6	7
1	2,51	-2,51	-2,51	-2,51	0,677	0,677
2	2,86	2,86	-2,86	-2,86	0,771	0,771
3	3,88	-3,88	3,88	-3,88	1,046	1,046
4	3,96	3,96	3,96	-3,96	1,068	1,068
5	1,94	-1,94	-1,94	1,94	0,523	0,523
6	1,9	1,9	-1,9	1,9	0,512	0,512
7	3,42	-3,42	3,42	3,42	0,922	0,922
8	2,83	2,83	2,83	2,83	0,763	0,763
9	2,65	-3,221	0	0	1,979	-1,935
10	2,8	3,4031	0	0	2,091	-2,045
11	2,24	0	-2,723	0	-1,636	1,673
12	3,82	0	4,6429	0	-2,790	2,853
13	3,13	0	0	-3,804	-2,286	-2,286
14	2,24	0	0	2,7225	-1,636	-1,636
15	2,68	0	0	0	-1,957	-1,957
$\sum_u(\bullet)$	42,860	-0,018	6,800	-4,202	0,050	0,951
$b_i(b_{ij})$	2,8573	-0,0016	0,6208	-0,384	0,011	0,218

Будем считать, что модель адекватна исходным данным с относительной погрешностью $\Delta = 3,1\%$ (максимальное значение из столбца 3 таблицы 6.4). Переходя к переменным X_i , имеем уравнение

$$\begin{aligned} \tau_{H(0,1;0,9)} = & 1,798 + 0,146r_2 + 0,794r_3 + 0,019L_{2H} - 0,252r_2^2 - \\ & - 0,016r_3^2 - 0,014L_{2H}^2 + 0,0019r_2r_3 + 8,044r_2L_{2H} - 0,0014r_3L_{2H}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Продолжение таблицы 6.3

Номер точки, u	$(x_3^2 - \varphi)y_u$	$x_1x_2y_u$	$x_1x_3y_u$	$x_2x_3y_u$
1	8	9	10	11
1	0,677	2,51	2,51	2,51
2	0,771	-2,86	-2,86	2,86
3	1,046	-3,88	3,88	-3,88
4	1,068	3,96	-3,96	-3,96
5	0,523	1,94	-1,94	-1,94
6	0,512	-1,9	1,9	-1,9
7	0,922	-3,42	-3,42	3,42
8	0,763	2,83	2,83	2,83
9	-1,935	0	0	0
10	-2,045	0	0	0
11	-1,636	0	0	0
12	-2,790	0	0	0
13	2,338	0	0	0
14	1,673	0	0	0
15	-1,957	0	0	0
$\sum_u(\bullet)$	-0,068	-0,820	-1,060	-0,060
$b_i(b_{ij})$	-0,016	-0,1025	-0,1325	-0,0075

Далее подставляя в (6.4) $\tau_{H(0,1;0,9)} = T_{H(0,1;0,9)} / \sqrt{L_H C_G}$, получим уравнение регрессии в физических переменных:

$$T_{H(0,1;0,9)} = \sqrt{L_H C_G} (1,798 + 0,146r_2 + 0,794r_3 + 0,019L_{2H} - 0,252r_2^2 - 0,016r_3^2 - 0,014L_{2H}^2 + 0,0019r_2r_3 + 8,044r_2L_{2H} - 0,0014r_3L_{2H}).$$

Таблица 6.4 – Значения погрешности

Номер точки, u	$y_{p\ u}$	Δ , %
1	2	3
1	2,4368	3,0
2	2,9036	1,5
3	3,8984	0,5
4	3,9552	0,1
5	1,9497	0,5
6	1,8865	0,7
7	3,3813	1,1
8	2,9081	2,7
9	2,7201	2,6
10	2,7161	3,1
11	2,2686	1,3
12	3,7776	1,1
13	3,1443	0,5
14	2,2119	1,3
15	2,7011	0,8

Контрольные вопросы

1. С какой целью вводится смещение квадратичной переменной?
2. В чем заключается отличие при вычислении b -коэффициентов в ОЦКП по сравнению с ПФЭ?

3. Чему равно количество звездных точек в ОЦКП при ядре плана вида ПФЭ 2^k ?
4. Какова особенность вычисления свободного члена уравнения регрессии стандартного вида?
5. В чем заключается отличие соотношения дисперсий b -коэффициентов квадратичной модели от моделей ПФЭ и ДФЭ?
6. Какой критерий используется для оценки значимости b -коэффициентов уравнения регрессии?
7. Какой критерий используется для проверки адекватности квадратичной модели?
8. Что характеризует построчная дисперсия?
9. Что характеризует дисперсия воспроизводимости?
10. Что характеризует дисперсия адекватности?
11. Что такое ядро композиционного плана?
12. Дайте геометрическую интерпретацию ОЦКП двух переменных.
13. Дайте геометрическую интерпретацию ОЦКП трех переменных.

Контрольные задания

Условия заданий соответствуют примеру 5.1. Варианты исходных данных для заданий приведены в табл. 8.1.

Объем задания.

1. Вычертить в масштабе план размещения сооружений.
2. Составить ОЦКП, вычисления высот МО минимальной высоты производить с шагом $\Delta H = 0,1$ м.
3. Определить коэффициенты уравнения регрессии в кодированных и физических переменных.
4. Описать условия адекватности модели.
5. Определить место расположения оптимального МО. Указать его на плане размещения сооружений.

6. Сравнить результаты расчетов высоты оптимального МО по уравнению регрессии с непосредственным расчетом, проведенным с использованием пошаговой процедуры.

7. Дать заключение о точности расчетов на основании принятых условий адекватности.

Таблица 8.1 – Варианты исходных данных

Номер варианта	Надежность защиты	Координаты сооружений и их высоты
1	2	3
1	0,9	табл. 8.2
2	0,9	табл. 8.3
3	0,9	табл. 8.4
4	0,9	табл. 8.5
5	0,9	табл. 8.6
6	0,95	табл. 8.2
7	0,95	табл. 8.3
8	0,95	табл. 8.4
9	0,95	табл. 8.5
10	0,95	табл. 6.6
11	0,99	табл. 8.2
12	0,99	табл. 8.3
13	0,99	табл. 8.4
14	0,99	табл. 8.5
15	0,99	табл. 8.6
16	0,995	табл. 8.2
17	0,995	табл. 8.3
18	0,995	табл. 8.4
19	0,995	табл. 8.5
20	0,995	табл. 8.6

Таблица 8.2 – Координаты и высоты сооружений (набор I)

Номер сооружения	Номер объ-екта-стержня	X координата расположения	Y координата расположения	Высота
1	2	3	4	5
1	1	6	3	25
	2	6	19	
	3	31	19	
	4	31	3	
2	5	19	24	30
	6	19	36	
	7	29	36	
	8	29	31	
	9	24	31	
	10	24	24	
3	11	61	15	15
	12	61	25	
	13	81	25	
	14	81	15	

Таблица 8.3 – Координаты и высоты сооружений (набор II)

Номер сооружения	Номер объ-екта-стержня	X координата расположения	Y координата расположения	Высота
1	2	3	4	5
1	1	41	3	25
	2	41	19	
	3	66	19	
	4	66	3	

Продолжение таблицы 8.3

1	2	3	4	5
2	5	22	24	30
	6	22	36	
	7	32	36	
	8	32	31	
	9	27	31	
	10	27	24	
3	11	73	15	15
	12	73	25	
	13	93	25	
	14	93	15	

Таблица 8.4 – Координаты и высоты сооружений (набор III)

Номер сооружения	Номер объ-екта-стержня	X координата расположения	Y координата расположения	Высота
1	2	3	4	5
1	1	40	6	25
	2	40	22	
	3	65	22	
	4	65	6	
2	5	23	20	30
	6	23	32	
	7	33	32	
	8	33	27	
	9	28	27	
	10	28	20	

Продолжение таблицы 8.4

1	2	3	4	5
3	11	74	16	15
	12	74	26	
	13	94	26	
	14	94	16	

Таблица 8.5 – Координаты и высоты сооружений (набор IV)

Номер сооружения	Номер объ-екта-стержня	X координата расположения	Y координата расположения	Высота
1	2	3	4	5
1	1	39	10	12
	2	39	26	
	3	64	26	
	4	64	10	
2	5	23	7	3
	6	23	19	
	7	33	19	
	8	33	14	
	9	28	14	
	10	28	7	
3	11	74	0	10
	12	74	10	
	13	94	10	
	14	94	0	

Таблица 8.6 – Координаты и высоты сооружений (набор V)

Номер сооружения	Номер объекта-стержня	X координата расположения	Y координата расположения	Высота
1	2	3	4	5
1	1	38	10	12
	2	38	26	
	3	63	26	
	4	63	10	
2	5	20	7	30
	6	20	19	
	7	30	19	
	8	30	14	
	9	25	14	
	10	25	7	
3	11	74	5	12
	12	74	15	
	13	94	15	
	14	94	5	

Список литературы

1. Барабашук В.И., Креденцер Б.П., Мирошниченко В.И. Планирование эксперимента в технике – К.: Техніка, 1984. – 200 с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 831 с.
3. Беспалов В.Д., Рудаков В.В. Планирование эксперимента в технике и электрофизике высоких напряжений: Учеб.-метод. пособие. / Под ред. В.В. Рудакова. – Х.: НТУ "ХПИ", 2006. – 60 с.
4. Винарский М.С., Лурье М.В. Планирование эксперимента в технологических исследованиях. – К.: Техніка, 1975. – 168 с.

5. Егоров А.Е., Азаров Г.Н., Коваль А.В. Исследование устройств и систем автоматики методом планирования эксперимента. / Под ред. В.Г. Воронова. – Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1986. – 240 с.
6. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Том I. – М.: Наука, 1966. – 552 с.
8. Петков А.А., Колиушко Д.Г., Колиушко Г.М. Выбор оптимальных параметров одиночного стержневого молниеотвода // Вісн. Національн. технічн. ун-ту "Харк. політехн. ін-т". Електроенергетика і перетворююча техніка. – Харків: НТУ "ХПІ". - №35. – 2004. С. 64 – 71.
9. ГОСТ Р 50649-94 Устойчивость к импульсному магнитному полю. Технические требования и методы испытаний. М.: Изд-во стандартов, 1994. – 20 с.
10. Петков А.А. Генерирование испытательных импульсов магнитного поля // Вісн. Національн. технічн. ун-ту "Харк. політехн. ін-т". Техніка і електрофізика високих напруг. – Х.: НТУ "ХПІ". - №37. – 2006. – С. 73 – 78.
11. Коттингхэм М. Excel 2000: руководство разработчика: Пер. с англ. – К.: Издательская группа BHV, 2000. – 704 с.
12. Разевиг В.Д. Схемотехническое моделирование с помощью Micro-Cap 7. – М.: Горячая линия-Телеком, 2003. – 368 с.

Приложение 1

Терминологический словарь

Гипотеза статистическая – любое предположение о форме или параметрах закона распределения случайных величин.

Дисперсия адекватности – дисперсия, характеризующая отклонение расчетных и экспериментальных значений отклика на всех сочетаниях уровней факторов (на всех строках плана эксперимента).

Дисперсия воспроизводимости (опытов) – дисперсия, характеризующая рассеивание значений отклика на всех сочетаниях уровней факторов (на всех строках плана эксперимента). При однородности построчных дисперсий, определяется как их среднеарифметическое.

Дисперсия построчная – дисперсия, характеризующая рассеивание значений отклика при одном сочетании уровней факторов (в одной строке плана эксперимента).

Дробный факторный эксперимент (ДФЭ) – эксперимент, в котором часть факторов (основные факторы) изменяется по закону ПФЭ, а другая (дополнительные факторы) – по закону изменения произведения некоторых факторов первой группы, причем влияние на отклик используемых произведений первой группы факторов незначительно.

Звездное плечо – это расстояние от начала координат до звездной точки.

Звездные точки – точки плана, расположенные на осях факторов, симметрично относительно начала координат.

Критерий проверки гипотезы – правило, на основании которого гипотеза принимается или отвергается.

Молниеотвод – устройство, воспринимающее удар молнии и отводящий его в землю.

Продолжение приложения 1

Молниеотвод минимальной высоты – молниеотвод, имеющий наименьшую высоту из всех молниеотводов, расположенных в точке (X_M, Y_M) , которые защищают данную группу сооружений.

Основа композиционного плана – см. ядро композиционного плана.

Параметр смещения – это величина, на которую смещаются значения квадрата фактора для обеспечения симметричности и ортогональности ОЦПК.

Полином второго порядка – сумма конечного числа членов вида $bx_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$, где k_j есть неотрицательное число и наибольшее из встречающихся в каком-либо члене значений суммы $k_1 + k_2 + \dots + k_n = 2$.

Полный факторный эксперимент (ПФЭ) – эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов.

Призма – многогранник, две грани (основания) которого параллельны, а остальные (боковые грани) пересекаются по параллельным прямым.

Призма прямая – призма, у которой боковые ребра перпендикулярны плоскости основания.

Ядро композиционного плана – ПФЭ или ДФЭ, на основе которого строится ОЦКП путем добавления звездных точек.

Приложение 2

Использование электронных таблиц Excel для расчетов в планировании эксперимента

В данном приложении рассмотрены основные приемы проведения вычислений по соотношениям, используемым в планировании эксперимента.

При этом предполагается, что пользователи знакомы с основами работы в программной среде Excel [11].

Для вычисления абсолютного значения используется функция **ABS(B3+D3)**. В примере показано вычисление абсолютного значения суммы содержимого ячеек B3 и D3. Используется при вычислении абсолютной и относительной погрешностей.

Определение наименьшего и наибольшего значений производится с помощью функций **МИН(B3;D3)** и **МАКС(B3;D3)**. В примере показано определение наименьшего и наибольшего значений из содержимого ячеек B3 и D3. Используется при определении резко отклоняющихся значений в параллельных опытах.

Вычисление суммы ряда значений производится либо непосредственным суммированием содержимого ячеек **B3+D3+F3+F4+F5**, либо с использованием функции **СУММ(B3;D3;F3:F5)**. В первом случае суммируется содержимое ячеек B3, D3, F3, F4 и F5, во втором – содержимое ячеек B3, D3 и интервала ячеек с F3 по F5.

Определение суммы квадратов вида $\sum_{i=1}^n X_i^2$, используемой во

многих вычислениях, удобнее производить в два этапа (см. рис. П 2.1а): вначале вычисляются квадраты значений в ячейках B2:B4 (например, в ячейку B2 введена формула **A2^2**), а затем суммируются квадраты. В ячейку B5 введена формула **СУММ(B2:B4)**.

Продолжение приложения 2

Аналогично производится вычисление суммы произведений

вида $\sum_{i=1}^n X_i Y_i$ (см. рис. П 2.1б). В ячейках A2:A4 и B2:B4 введены сомножители, в В ячейках C2:C4 – их произведения (например, в ячейку C2 введена формула **A2*B2**). В ячейку C5 введена формула **СУММ(C2:C4)**.

а

	A	B	C
1	X	X ²	
2	2	4	
3	4	16	
4	5	25	
5	Σ =	45	

б

	A	B	C	D
1	X	Y	Z=X*Y	
2	2	5	10	
3	4	3	12	
4	5	8	40	
5	Σ =		62	

Рисунок П 2.1 – Примеры вычислений

Вычисления средних значений производится либо непосредственно, например, среднее значение пяти чисел **(B3+D3+F3+F4+F5)/5**, либо с использованием функции **СРЗНАЧ(B3;D3;F3:F5)**.

Определение значений $t_{кр}$ (распределение Стьюдента), используемого в частности для определения значимости коэффициентов уравнения регрессии, производится с помощью функции

СТЮДРАСПОБР(вероятность;степени_свободы).

При расчетах в позицию параметра "**вероятность**" подставляется значение уровня значимости α (обычно $\alpha = 0,05$). В позицию параметра

Продолжение приложения 2

"**степени_свободы**" подставляют при проверке значимости коэффициентов число степеней свободы дисперсии воспроизводимости, рассчитанного по (2.8). Например, **СТЮДРАСПОБР(0,05;8) = 2,306004**.

Определение значений $F_{кр}$ (распределение Фишера), используемого при анализе адекватности модели, производится с помощью функции

ФРАСПОБР(вероятность;степени_свободы1;степени_свободы2)

При расчетах в позицию параметра "**вероятность**" подставляется значение уровня значимости α (обычно $\alpha = 0,05$). В позицию параметра "**степени_свободы1**" подставляют число степеней свободы большей дисперсии (при анализе адекватности – дисперсии адекватности – числитель (2.11)). В позицию параметра "**степени_свободы2**" подставляют число степеней свободы меньшей дисперсии (при анализе адекватности – дисперсии воспроизводимости – знаменатель (2.11)). Например, **ФРАСПОБР(0,05;4;8) = 3,837853**.

Приложение 3

Распределение Стьюдента.

Значения $t_{\text{табл}}$, удовлетворяющие уравнению $P(|T| < t_{\text{табл}}) = 1 - \alpha$

f_t	α				
	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
1	6,314	12,706	63,66	127,3	636,6
2	2,920	4,303	9,925	14,089	31,599
3	2,353	3,182	5,841	7,453	12,924
4	2,132	2,776	4,604	5,598	8,610
5	2,015	2,571	4,032	4,773	6,869
6	1,943	2,447	3,707	4,317	5,959
7	1,895	2,365	3,499	4,029	5,408
8	1,860	2,306	3,355	3,833	5,041
9	1,833	2,262	3,250	3,690	4,781
10	1,812	2,228	3,169	3,581	4,587
12	1,782	2,179	3,055	3,428	4,318
14	1,761	2,145	2,977	3,326	4,140
16	1,746	2,120	2,921	3,252	4,015
18	1,734	2,101	2,878	3,197	3,922
20	1,725	2,086	2,845	3,153	3,850
22	1,717	2,074	2,819	3,119	3,792
24	1,711	2,064	2,797	3,091	3,745
26	1,706	2,056	2,779	3,067	3,707
28	1,701	2,048	2,763	3,047	3,674
30	1,697	2,042	2,750	3,030	3,646
40	1,684	2,021	2,704	2,971	3,551
50	1,676	2,009	2,678	2,937	3,496
60	1,671	2,000	2,660	2,915	3,460
70	1,667	1,994	2,648	2,899	3,435
80	1,664	1,990	2,639	2,887	3,416
90	1,662	1,987	2,632	2,878	3,402
100	1,660	1,984	2,626	2,871	3,390
∞	1,64	1,96	2,56	2,81	3,29

Примечание. Для определения $t_{\text{кр}}$ можно использовать стандартную функцию, входящую в программное обеспечение табличного процессора Excel

СТЮДРАСПОБР(вероятность;степени_свободы),

краткое описание см. приложение 2.

Приложение 4

Значение F -критерия для уровня значимости $\alpha = 0,05$

f_2	f_1								
	1	2	3	4	5	8	12	24	∞
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	238,88	243,91	249,05	254,31
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,85	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,82	4,68	4,53	4,37
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,07	2,91	2,74	2,54
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	2,85	2,69	2,51	2,30
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,70	2,53	2,35	2,13
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,59	2,42	2,24	2,01
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,51	2,34	2,15	1,92
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,45	2,28	2,08	1,84
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,40	2,23	2,03	1,78
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,36	2,18	1,98	1,73
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,32	2,15	1,95	1,69
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,29	2,12	1,91	1,65
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,27	2,09	1,89	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,18	2,00	1,79	1,51
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,13	1,95	1,74	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,10	1,92	1,70	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,07	1,89	1,67	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,06	1,88	1,65	1,32
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,04	1,86	1,64	1,30
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,03	1,85	1,63	1,28
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	1,94	1,75	1,52	1,01

Примечание: 1. f_1 – число степеней свободы большей дисперсии; f_2 – число степеней свободы меньшей дисперсии. 2. Для определения $F_{кр}$ можно использовать стандартную функцию, входящую в программное обеспечение табличного процессора Excel

ФРАСПОБР(вероятность;степени_свободы1;степени_свободы2),
краткое описание см. приложение 2.

Содержание

Вступление	3
1. Ортогональное планирование второго порядка	4
2. Статистический анализ уравнения регрессии второго порядка	16
2.1. Проверка значимости коэффициентов регрессии	16
2.2. Проверка адекватности модели	19
3. Переход к физическим переменным	21
4. Анализ квадратичной модели	23
5. Оптимизация стержневого молниеотвода, защищающего группу сооружений	25
6. Построение моделей выходных параметров высоковольтных импульсных испытательных устройств	36
Контрольные вопросы	45
Контрольные задания	46
Список литературы	51
Приложение 1. Терминологический словарь	53
Приложение 2. Использование электронных таблиц Excel для расчетов в планировании эксперимента	55
Приложение 3. Распределение Стьюдента	58
Приложение 4. Распределение F-критерия	59

Навчальне видання

ПЕТКОВ Олександр Олександрович

**Ортогональне центральне композиційне планування в
техніці та електрофізиці високих напруг**

Навчально-методичний посібник
для студентів електротехнічних та електроенергетичних
спеціальностей

Російською мовою

Відповідальний за випуск В. В. Рудаков

Роботу до видання рекомендував проф. О.П. Сук

В авторській редакції

План 2007 р., поз. 87/ _____

Підп. до друку __. __. __. Формат 60х84 1/16. Папір офсетний.
Друк – ризографія. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 2,5.
Обл.-вид. арк. 3. Наклад _____ прим. Зам. № _____. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ “ХП”.
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК №116 від 10.07.2000 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.

Друкарня НТУ “ХП”.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.